数理解析研究所講究録
第1923巻 2014年 221-226

Lagrange-type duality in DC programming

島根大学大学院総合理工学研究科 原田涼平 (Ryohei Harada)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院総合理工学研究科 黒岩大史 (Daishi Kuroiwa)
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

1 導入

以下のＤＣ計画問題について考える：

$$(\mathrm{P})\quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & f_0(x)-g_0(x) \\ \text{条件} & f_i(x)-g_i(x)\leq 0,\ i=1,\cdots,m \end{array}$$

ただし、$f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}(i=0,1,\cdots,m)$ は閉真凸関数とする。ＤＣ計画問題の双対性の結果が、１９９９年、J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle [4] によって与えられた。その後ＤＣ計画問題を同値変形して得られる標準ＤＣ計画問題に関する双対性の結果が２０１３年、Y. Fujiwara, D. Kuroiwa [5] によって与えられた。標準ＤＣ計画問題はＤＣ計画問題の特殊な場合であるが、標準ＤＣ計画問題に限れば [5] の結果は [4] の拡張になっている。そこで本書ではＤＣ計画問題に関する双対性の結果を [4] よりも広い範囲で適用できるような条件を考察していく。

2 準備

$\mathbb{R}^n$ において、$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ と $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ の内積を $\langle x,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ で定義する。集合 $A\subseteq\mathbb{R}^n$ の凸包、錐包をそれぞれ $\mathrm{co}\,A$, $\mathrm{cone}\,A$ と表記する。主たる関数の値域として拡張実数 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を考え、慣例に従って $(+\infty)-(+\infty)=+\infty$、$0\cdot(+\infty)=0$ としておく。f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ への関数とするとき、$\mathrm{dom}\,f=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)<+\infty\}$ を f の実行定義域、$\mathrm{epi}\,f=\{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid x\in\mathrm{dom}\,f, f(x)\leq r\}$ を f のエピグラフという。$\mathrm{dom}f\neq\emptyset$ のとき、f は真であるという。$\mathrm{epi}f$ が凸集合、閉集合のとき、f はそれぞれ凸関数、下半連続関数（あるいは閉関数）という。もちろん、f が凸関数であることと、任意の $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in(0,1)$ に対して、$f((1-\alpha)x+\alpha y)\leq(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y)$ が成り立つことは同値である。$\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ における二項関係 $\bullet$ と $y\in\mathbb{R}$ について、

$\{f \bullet y\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \bullet y\}$ で定義される集合を f のレベル集合という。凸関数 f について、$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\}$ で定義される関数 $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を f の共役関数という。$x \in \mathbb{R}^n$ における劣微分を $\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in \mathbb{R}^n\}$ で定義する。このとき $f(x) + f^*(y) = \langle y, x \rangle$ であることと $y \in \partial f(x)$ であることは同値である。集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A \end{cases}$$

で定義される関数 $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を A の標示関数という。以下は凸計画問題における双対性の結果である。

定理 1. (Goberna, Jeyakumar, Lopez, [1]). I を添え字集合、$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i \in I)$ を下半連続真凸関数、C を閉凸集合、$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$ とする。このとき以下は同値である：

(i) $\operatorname{cone} \operatorname{co} \bigcup_{i \in I} \operatorname{epi} g_i^* + \operatorname{epi} \delta_C^*$ は閉集合

(ii) $A \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$ かつ $\operatorname{epi} f^* + \operatorname{epi} \delta_A^*$ が閉であるような任意の閉真凸関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ について

$$\inf_{x \in A} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x \in C} \left\{ f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \right\},$$

(ii) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\inf_{x \in A} \langle v, x \rangle = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf_{x \in C} \left\{ \langle v, x \rangle + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \right\},$$

ただし、$\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$ であるとは任意の $i \in I$ に対して $\lambda_i \geq 0$ でありさらに $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ が有限集合となることである。

3　DC計画問題における双対性の既存の結果

DC計画問題 (P) における双対性の既存の結果として、まずは J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle [4] によって与えられた定理 2 と定理 3 について述べる。ただし、この二つの定理においては、$0 \cdot (+\infty) = +\infty$, $0 \cdot (-\infty) = 0$ としている。

定理 2. (J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle, [4]) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} (i = 0, 1, \cdots, m)$ を凸関数、$g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を $g_0 = g_0^{**}$ を満たす関数、

$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} (i = 1, \cdots, m)$ を $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0\,(i = 1, \cdots, m)\}$ で劣微分可能な凸関数とする。

任意の $(x_1^*, \cdots, x_m^*) \in \prod_{i=1}^{m} \{g_i^* - f_i^* \leq 0\}$ に対してある $\bar{x} \in \mathrm{dom} f_0$ が存在して $f_i(\bar{x}) - \langle \bar{x}, x_i^* \rangle + g_i^*(x_i^*) < 0 (i = 1, \cdots, m)$ となるならば

$$\inf_{f_i(x)-g_i(x)\leq 0} \{f_0(x) - g_0(x)\}$$
$$= \inf_{x^* \in \mathrm{dom} g_0^*} \inf_{g_i^*(x_i^*)-f_i^*(x_i^*)\leq 0} \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \left\{ g_0^*(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i^*(x_i^*) - \left(f_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)^* \left(x^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^* \right) \right\}$$

定理 3. (J.-E. Martinez-Legaz, M. Volle, [4]) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\,(i = 0, 1, \cdots, m)$ を凸関数、$g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を $g_0 = g_0^{**}$ を満たす関数、$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} (i = 1, \cdots, m)$ を $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0 (i = 1, \cdots, m)\}$ で劣微分可能な凸関数とする。任意の $(x_1^*, \cdots, x_m^*) \in \Omega = \{(x_1^*, \cdots, x_m^*) \in \mathbb{R}^{nm} \mid \partial g_1^*(x_1^*) \cap \cdots \cap \partial g_m^*(x_m^*) \neq \emptyset\}$ に対してある $x_0 \in \mathrm{dom} f_0$ が存在して $f_i(x_0) - \langle x_0, x_i^* \rangle + g_i^*(x_i^*) < 0 (i = 1, \cdots, m)$ となるならば

$$\inf_{f_i(x)-g_i(x)\leq 0} \{f_0(x) - g_0(x)\}$$
$$= \inf_{(x_0^*, x_1^*, \cdots, x_m^*) \in \mathrm{dom} g_0^* \times \Omega} \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \left\{ g_0^*(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i^*(x_i^*) - \left(f_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)^* \left(x^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^* \right) \right\}$$

次に標準ＤＣ計画問題についての先行研究を述べる。一般に、ＤＣ計画問題 (P) は次の標準ＤＣ計画問題 (Q) に同値変形することができる:

$$(\mathrm{Q}) \quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & \langle a, x \rangle \\ \text{条件} & f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0 \end{array}$$

ただし、$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数、$a \in \mathbb{R}^n$ とする。次の定理 4 と定理 5 は標準ＤＣ計画問題 (Q) の双対性を与えている。

定理 4. (Y. Fujiwara, D. Kuroiwa, [5]) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数、$a \in \mathbb{R}^n$、$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0\} \neq \emptyset$、$\bigcup_{x \in S} \partial g(x) \subseteq A$ とする。任意の $z \in A \cap \mathrm{dom}\, g^*$ に対して、$\{f \leq 0\} \cap \{\langle -z, \cdot \rangle + g^*(z) \leq 0\} \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{cone}\,\mathrm{co}(\mathrm{epi}\, f^* \cup \{-z\} \times [-g^*(z), +\infty) \cup \{0\} \times [0, +\infty))$ が閉集合であるならば、

$$\inf_{f(x)\leq 0, g(x)\geq 0} \langle a, x \rangle = \inf_{y \in A} \max_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x \rangle + g^*(y))\}$$

定理 5. (Y. Fujiwara, D. Kuroiwa, [5]) $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を凸関数、$a \in \mathbb{R}^n$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0,\ g(x) \geq 0\} \neq \emptyset$、$Y' = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \{f \leq 0\} \cap \{\langle y, \cdot \rangle > g^*(y)\} \neq \emptyset\}$、$\bigcup_{x \in S} \partial g(x) \subseteq A \subseteq Y'$ とする。$\mathrm{cone}\,\mathrm{epi}\, f^* + \{0\} \times [0, +\infty)$ が閉集合であるならば

$$\inf_{f(x)\leq 0, g(x)\geq 0} \langle a, x \rangle = \inf_{y \in A} \max_{\lambda, \mu \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle a, x \rangle + \lambda f(x) + \mu(\langle -y, x \rangle + g^*(y))\}$$

一般に標準DC計画問題はDC計画問題の特別な場合であるので、定理4と定理5よりも定理2と定理3の方が適用できる範囲は広い。しかしながら標準DC計画問題に限れば、定理4と定理5は 定理2と定理3の拡張になっており、仮定の条件も弱くなっている。そこで以降では一般のＤＣ計画問題において双対性が成り立つような定理2と定理3よりも弱い仮定の条件を考えていく。

4 主定理とその応用

(P)を変形して得られる以下の凸計画問題 $(\mathrm{P}(y_0,(y_i)))$ を考える:

$$(\mathrm{P}(y_0,(y_i)))\quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & f_0(x) - \langle x, y_0\rangle + g_0^*(y_0) \\ \text{条件} & f_i(x) - \langle x, y_i\rangle + g_i^*(y_i) \leq 0, \forall i = 1, \cdots, m \end{array}$$

ただし、$(y_0,(y_i)) = (y_0, y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^{n(m+1)}$ と表記する。ここで、Val(P) と $\mathrm{Val}(\mathrm{P}(y_0,(y_i)))$ をそれぞれ(P)と $(\mathrm{P}(y_0,(y_i)))$ の最適値とする。このとき Val(P) と $\mathrm{Val}(\mathrm{P}(y_0,(y_i)))$ について、以下の関係が成り立つ。

定理 6. ([6]) $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i = 0, 1, \cdots, m)$ を閉真凸関数、$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \cdots, m\} \neq \emptyset$、$g_i (i = 1, \cdots, m)$ は S で劣微分可能、$\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$、$\bigcup_{x \in S} \left(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x)\right) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ とする。このとき

$$\mathrm{Val}(\mathrm{P}) = \inf_{(y_0,(y_i)) \in D_0 \times D} \mathrm{Val}(\mathrm{P}(y_0,(y_i))).$$

この事実を利用することで以下の結果を得る。

定理 7. ([6]) $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i = 0, 1, \cdots, m)$ を閉真凸関数、$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, \cdots, m\} \neq \emptyset$、$g_i (i = 1, \cdots, m)$ は S で劣微分可能、$\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$、$\bigcup_{x \in S} \left(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x)\right) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ とする。任意の $(y_i) \in D \cap \prod_{i=1}^m \mathrm{dom}\, g_i^*$ に対して $S(y_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - \langle x, y_i\rangle + g_i^*(y_i) \leq 0, \forall i = 1, \cdots, m\} \neq \emptyset$ かつ

$$\mathrm{cone}\,\mathrm{co} \bigcup_{i=1}^m (\mathrm{epi}\, f_i^* - (y_i, g_i^*(y_i))) + \{0\} \times [0, +\infty)$$

が閉集合であるならば

$$\mathrm{Val}(\mathrm{P}) = \inf_{(y_0,(y_i)) \in D_0 \times D} \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) - \langle x, y_0\rangle + g_0^*(y_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - \langle x, y_i\rangle + g_i^*(y_i)) \right\}$$

この結果は定理 2、3、4、5 の拡張になっていることがわかる ([6])。次にこの結果を用いて解決できる例を与える。

例 1.

$$(\mathrm{P})\quad \begin{array}{ll} \text{最小化} & x-|y| \\ \text{条件} & x^2+y^2-1-|x|\leq 0 \end{array}$$

$f_0(x,y)=x$, $g_0(x,y)=|y|$, $f_1(x,y)=x^2+y^2-1$, $g_1(x,y)=|x|$, $D_0=\{0\}\times[-1,1]$,$D=[-1,1]\times\{0\}$ とする。任意の $(z,w)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$g_0^*(z,w)=\delta_{\{0\}\times[-1,1]} \quad \text{and} \quad g_1^*(z,w)=\delta_{[-1,1]\times\{0\}}$$

となる。さらに任意の $y_1\in D$ に対して $S(y_1)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f_1(x)-\langle x,y_1\rangle+g_1^*(y_1)\leq 0\}$ が空集合でないことと

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}(\operatorname{epi}f_1^*-(y_1,g_1^*(y_1)))+\{0\}\times[0,+\infty)$$

が閉集合になることがわかる。したがって定理 8 より

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val(P)} &= \inf_{(t_1,t_2)\in D_0,\,(t_3,t_4)\in D}\ \max_{\lambda\geq 0}\ \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \\
&\quad \{f_0(x,y)-\langle(x,y),(t_1,t_2)\rangle+g_0^*(t_1,t_2)+\lambda(f_1(x,y)-\langle(x,y),(t_3,t_4)\rangle+g_1^*(t_3,t_4)\} \\
&= \inf_{t_2,t_3\in[-1,1]}\ \max_{\lambda\geq 0}\ \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\{x-t_2y+\lambda(x^2+y^2-1-t_3x)\} \\
&= \inf_{t_2,t_3\in[-1,1]}\ \max_{\lambda>0}\ \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\{x-t_2y+\lambda(x^2+y^2-1-t_3x)\} \\
&= \inf_{t_2,t_3\in[-1,1]}\ \max_{\lambda>0}\ \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \\
&\quad \left\{\lambda\left(\left(x-\frac{\lambda t_3-1}{2\lambda}\right)^2+\left(y-\frac{t_2}{2\lambda}\right)^2-\left(\frac{\lambda t_3-1}{2\lambda}\right)^2-\left(\frac{t_2}{2\lambda}\right)^2-1\right)\right\} \\
&= \inf_{t_2,t_3\in[-1,1]}\ \max_{\lambda>0}\left\{\lambda\left(-\left(\frac{\lambda t_3-1}{2\lambda}\right)^2-\left(\frac{t_2}{2\lambda}\right)^2-1\right)\right\} \\
&= \inf_{t_2,t_3\in[-1,1]}\ -\min_{\lambda>0}\left\{\frac{t_3^2+4}{4}\lambda+\frac{t_2^2+1}{4\lambda}-\frac{t_3}{2}\right\} \\
&= \inf_{t_2,t_3\in[-1,1]}\left\{-2\sqrt{\frac{t_3^2+4}{4}\cdot\frac{t_2^2+1}{4}}+\frac{t_3}{2}\right\} \\
&= \inf_{t_3\in[-1,1]}\left\{-2\sqrt{\frac{t_3^2+4}{4}\cdot\frac{1^2+1}{4}}+\frac{t_3}{2}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}
\end{aligned}$$

関数 $f_i(i=1,\cdots,m)$ がゼロ関数のとき、上の定理で現れる

$$\operatorname{cone}\operatorname{co}\bigcup_{i=1}^{m}(\operatorname{epi}f_i^*-(y_i,g_i^*(y_i)))+\{0\}\times[0,+\infty)$$

は、特別な仮定が成立していなくとも、常に閉集合となる。従って、逆凸制約のＤＣ最適化問題に対する興味深い結果が得られる。

定理 8. ([6]) $f_0, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i = 0, 1, \cdots, m)$ を閉真凸関数、$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, \forall i = 1, \cdots, m\} \neq \emptyset$、$g_i (i = 1, \cdots, m)$ は S で劣微分可能、$\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$、$\bigcup_{x \in S} \left(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x) \right) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ とする。このとき、

$$\mathrm{Val(P)} = \inf_{(y_0, (y_i)) \in D_0 \times D} \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i^*(y_i) - \langle x, y_i \rangle) \right\}$$

参考文献

[1] M.A. Gberna, V. Jeyakumar, M.A. López, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 1184-1194.

[2] V. Jeyakumar, N. Dinh, G.M. Lee, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization* , Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales (2004)

[3] R. Horst, N.V. Thoai, *DC programming: overview*, J. Optim. Theory Appl. 103 (1999) 1-43.

[4] J.-E. Martínez-Legaz, M. Volle, *Duality in DC programming: the case of several DC constraints*, J. Math. Anal. Appl. 237 (1999) 657-671.

[5] Y. Fujiwara, D. Kuroiwa, *Lagrange duality in canonical DC programming*, J. Math. Anal. Appl. 408 (2013) 476-483.

[6] R. Harada, D. Kuroiwa, *Lagrange-type duality in DC programming*, submitted.